

Géométrie dans l'espace

I. Caractérisation de droites et de plans dans l'espace

1. La droite

Pour repérer un point sur une droite, qu'a-t-on besoin ?

8594 ; d'une graduation, donc d'une distance, donc de deux points distincts.

Ainsi, une **droite** est définie par deux points distincts.

La droite contenant les points A et B se nomme la droite (AB).



Remarque : une droite se caractérise par un point et une direction.

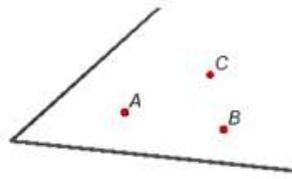
2. Le plan

Pour repérer un point sur un plan, qu'a-t-on besoin ?

8594 ; d'un repère, donc de deux droites sécantes, donc trois points non alignés.

Ainsi, un **plan** est défini par trois points non alignés.

Le plan contenant les points A, B et C se nomme le plan (ABC).



II. Position de deux droites de l'espace

1. Droites coplanaires



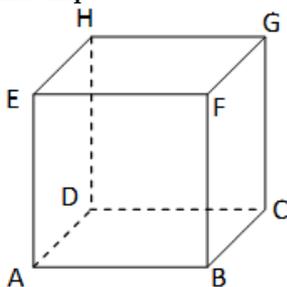
Définition :

Deux droites sont dites **coplanaires** lorsqu'elles sont contenues dans un même plan.

Remarque :

Dans ce cas, elles sont soit parallèles, soit sécantes et nous pouvons appliquer les propriétés et théorèmes vu en géométrie plane.

Exemple :



Dans le plan (ABC) : (AB) // (CD)

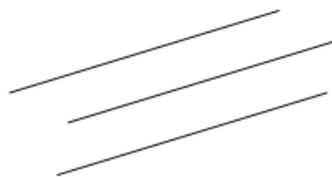
(AB) et (BC) sont sécantes.

Dans le plan (ABG) : (AB) // (GH)

(AB) et (BG) sont sécantes.

⚠ Transitivité du parallélisme :

Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.



2. Droites non-coplanaires

⚠ Définition :

Deux droites sont dites **non-coplanaires** lorsqu'elles ne sont pas contenues dans un même plan.

Exemple :

Dans le cube précédent, les droites (AB) et (CG) ne sont contenues dans aucun plan commun. Elles sont non-coplanaires.

Remarque :

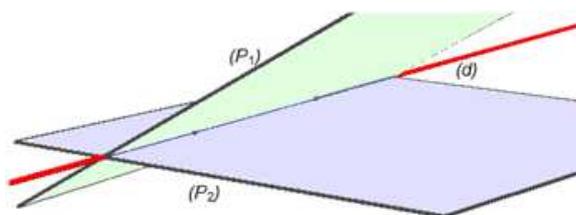
Dans l'espace, deux droites peuvent être non parallèles et non sécantes.

III. Position de deux plans de l'espace

Deux plans de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

⚠ Propriété :

L'intersection de deux plans est une droite, appelée droite d'intersection.



$$(P) \cap (Q) = (d)$$

Exemple :

Dans le cube ABCDEFGH,

- $(ABC) \cap (AGB) = (AB)$
- $(ABC) \cap (DCG) = (DC)$
- $(ABC) \cap (DFG) = (AD)$

⚠ Définition :

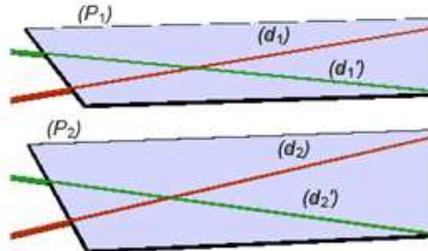
Deux plans sont **parallèles** lorsqu'ils sont confondus ou lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

Exemple :

$(ABC) = (ABD)$ et $(ABC) // (EFG)$

⚠ Propriété :

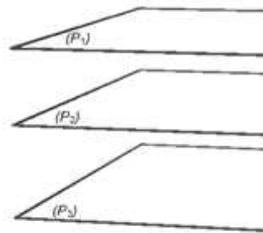
Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes d'un des deux plans sont parallèles à deux droites de l'autre plan.



$$\left. \begin{array}{l} (d_1) \parallel (d_2) \\ (d_1') \parallel (d_2') \end{array} \right\} \Rightarrow (P_1) \parallel (P_2)$$

⚠ Transitivité du parallélisme :

Si deux plans sont parallèles à un même troisième plan, alors ils sont parallèles entre eux.

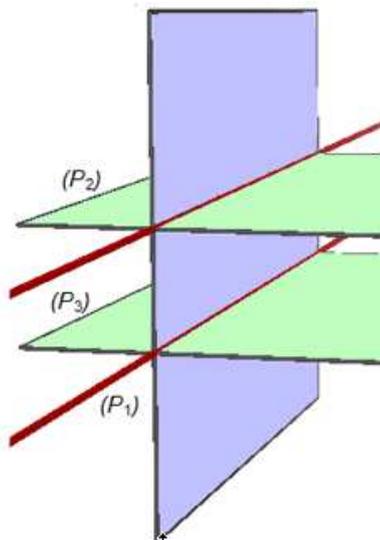


$$\left. \begin{array}{l} (P_1) \parallel (P_2) \\ (P_2) \parallel (P_3) \end{array} \right\} \Rightarrow (P_1) \parallel (P_3)$$

⚠ Propriété :

Soient deux plans parallèles.

Si un troisième plan est perpendiculaire à l'un des deux plans, alors il est perpendiculaire à l'autre plan.



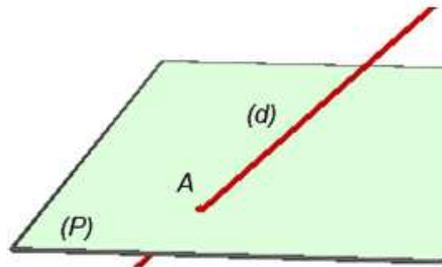
$$\left. \begin{array}{l} (d_2) \parallel (d_3) \\ (P_1) \perp (P_2) \end{array} \right\} \Rightarrow (P_1) \perp (P_3)$$

IV. Position d'une droite et d'un plan dans l'espace

Une droite et un plan sont soit sécants, soit parallèles.

⚠ Définition :

Une droite et un plan sont sécants s'il existe un point d'intersection.



La droite (d) et le plan (P) se coupent au point A.

⚠ Définition :

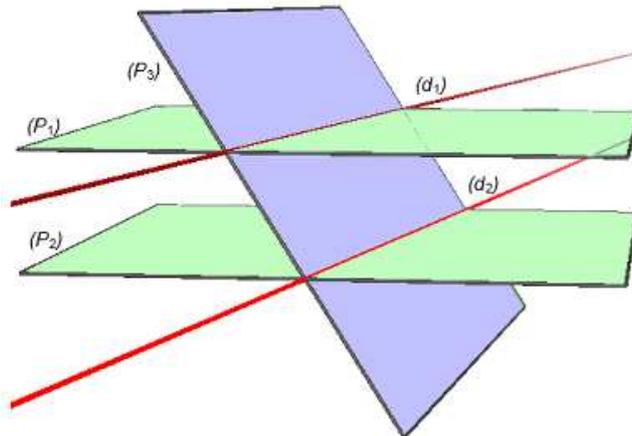
Une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils sont soit confondus, soit lorsqu'ils n'ont pas de point d'intersection.

Exemple :

Dans le cube ABCDEFGH, $(AC) \subset (ABC)$ et $(EG) \parallel (ABC)$.

⚠ Propriété :

Si deux plans sont parallèles, tout plan coupant l'un, coupe l'autre. Les droites d'intersection sont parallèles entre elles.



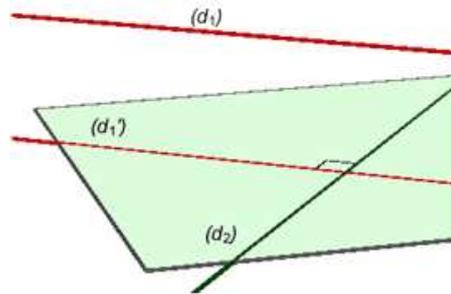
$$\left. \begin{array}{l} (P_1) \parallel (P_2) \\ (P_3) \cap (P_1) = (d_1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (P_3) \cap (P_2) = (d_2) \\ (d_1) \parallel (d_2) \end{array} \right.$$

V. Orthogonalité dans l'espace

1. Droites orthogonales

⚠ Définition :

Deux droites de l'espace sont dites **orthogonales** lorsqu'il existe une droite parallèle à l'une et perpendiculaire à l'autre.



(d1) et (d2) sont orthogonales.

Exemple :

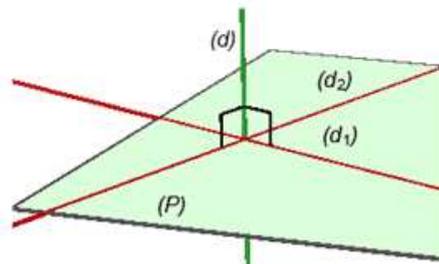
Dans le cube ABCDEFGH, nous avons :

$$\left. \begin{array}{l} (EF) \parallel (AB) \\ (AB) \perp (BC) \end{array} \right\} \Rightarrow (EF) \text{ et } (BC) \text{ sont orthogonales.}$$

2. Droite et plan orthogonaux/perpendiculaires

⚠ Définition :

Une droite est **orthogonale** (perpendiculaire) à un plan lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



$$\left. \begin{array}{l} (d) \perp (d_1) \\ (d) \perp (d_2) \end{array} \right\} \Rightarrow (d) \perp (P)$$

Exemple :

Dans le cube ABCDEFGH, la droite (FB) est orthogonale aux droites (AB) et (BC), elle est donc orthogonale au plan (ABC).

⚠ Propriété :

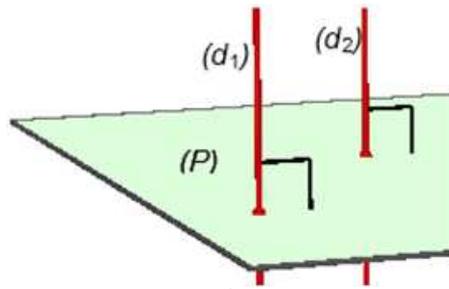
Si une droite est orthogonale à un plan, elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Exemple :

Dans le cube ABCDEFGH, la droite (FB) est orthogonale à (ABC), ainsi (FB) est orthogonale à (AC).

⚠ Propriété :

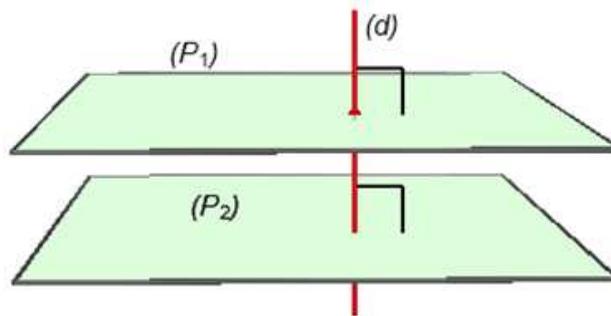
Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles entre elles.



$$\left. \begin{array}{l} (d_1) \perp (P) \\ (d_2) \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (d_1) \parallel (d_2)$$

⚠ Propriété :

Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles entre eux.



$$\left. \begin{array}{l} (d_1) \perp (d) \\ (d_2) \perp (d) \end{array} \right\} \Rightarrow (d_1) \parallel (d_2)$$